

Tangenten-n-Seite an Eiliniien

Kowalsky, Hans-Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 50, 2000,
S.97-111



J. Cramer Verlag, Braunschweig

Tangenten-n-Seite an Eilinen

von **Hans-Joachim Kowalsky**, Braunschweig*

(Eingegangen am 06.03.2001)

0. Einleitung

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf eine von Hans Robert Müller kurz vor seinem Tod aufgeworfene Fragestellung, die er selbst nicht mehr untersuchen konnte.

In der reellen affinen Ebene sei eine Eilinie E (stetig differenzierbare, einfach geschlossene, streng konvexe Kurve) gegeben. Außerdem sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 3$.

0.1 Definition *Ein Müllersches n -Seit von E ist ein einfach geschlossenes Tangenten- n -Seit von E , bei dem der Berührungspunkt jeder Seite gerade der jeweiligen Seitenmittelpunkt ist.*

Die Problemstellung lautet nun:

Welche Müllerschen n -Seite besitzt E ? Welche Eilinen besitzen vorgegebene, durch Müllersche n -Seite bestimmte Eigenschaften?

Da die im Rahmen dieser Problemstellung relevanten Begriffe wie z.B. „Eilinie“, „Tangente“, „Mittelpunkt“ gegenüber Affinitäten invariant sind, handelt es sich um eine Fragestellung der affinen Geometrie. Dennoch soll in Einzelfällen ohne besonderen Hinweis zusätzlich eine Euklidische Struktur vorausgesetzt werden, um beispielsweise von einem Kreis sprechen zu können.

1. Erläuterung der Situation

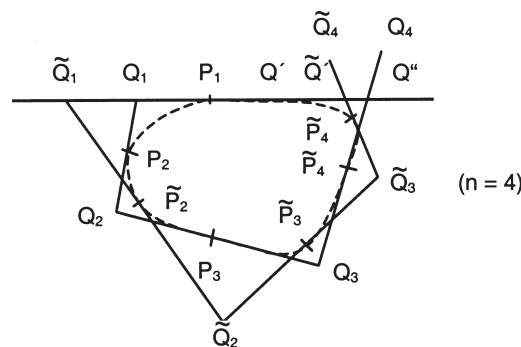
Zur Normierung der Bezeichnungsweise soll stets vorausgesetzt werden, daß die jeweilige Eilinie E orientiert ist. Dann sind auch alle Tangenten- n -Seite von E orientiert, und die Numerierung von Eckpunkten und Berührungspunkten soll immer dieser Orientierung entsprechen.

Gegeben sei jetzt ein Punkt P_1 von E . Es soll versucht werden, ein Müllersches n -Seit zu konstruieren, das E in P_1 berührt; ein Versuch, der im allgemeinen fehlschlagen wird, aber doch zu einem durch P_1 eindeutig bestimmten Tangente- n -Seit $\Sigma_n(P_1)$ führt, das die Müllerschen Bedingungen fast vollständig erfüllt.

Zu diesem Zweck wähle man auf der Tangente von E in P_1 in positiver Richtung einen Punkt Q_1 als ersten Eckpunkt. Mit ihm ist dann auch der auf der Tangente zu P_1 symmetrische Punkt Q' bestimmt. Die weitere Konstruktion von Berührungspunkten P_2, \dots, P_n und

* Prof.em. Dr. H.-J. Kowalsky · Am Schiefen Berg 20 · D-38302 Wolfenbüttel

Eckpunkten Q_2, \dots, Q_n ist nun durch die Müllerschen Bedingungen eindeutig festgelegt: Konstruktion der Tangente von Q_1 aus an E in positiver Richtung mit dem Berührungspunkt P_2 und dem nächsten Eckpunkt Q_2 , so daß P_2 Mittelpunkt zwischen Q_1 und Q_2 ist, u.s.w. Diese Konstruktion ergibt aber im allgemeinen nicht einmal ein geschlossenes Tangenten- n -Seit, weil Q' nicht mit Q_n zusammenfällt. (Ganz abgesehen von den Extremfällen, daß E nur unvollständig oder mehrfach umrundet wird.) Selbst der Schnittpunkt Q'' von $Q_{n-1} \vee Q_n$ mit $Q_1 \vee Q'$ wird im allgemeinen von Q' verschieden sein.



Figur 1

Nun bewirkt jedoch eine andere Wahl von Q_1 gegenläufige Veränderungen von Q' und Q'' , so daß es aus Stetigkeitsgründen genau eine Lage \tilde{Q}_1 von Q_1 mit $\tilde{Q}'' = \tilde{Q}'$ gibt. Aber selbst dann wird die Schließungsbedingung $\tilde{Q}_n = \tilde{Q}'$ im allgemeinen immer noch nicht erfüllt sein: Die Schließungsbedingung ist eben 2-dimensional, während der Freiheitsgrad beim Start nur 1-dimensional ist, nämlich bei der Wahl von Q_1 .

Betrachtet man jedoch das zuletzt konstruierte Tangenten- n -Seit, bei dem nur Q_n durch $Q'' = Q'$ ersetzt wird, so hat man es mit einem durch P_1 eindeutig bestimmten geschlossenen Tangenten- n -Seit $\Sigma_n(P_1)$ zu tun, bei dem mit höchstens der Ausnahme der Seite zwischen Q_{n-1} und Q' alle anderen Seiten mit ihren Berührungspunkten die Müllersche Mittelpunktsbedingung erfüllen.

Die Abweichung zwischen $\Sigma_n(P_1)$ und einem Müllerschen n -Seit kann mit den bisherigen Bezeichnungen durch

$$\mathbf{1.1 \text{ Definition}} \quad \delta_n(P_1) = a-1 \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{P_n Q_n} = a \overrightarrow{P_n Q'}$$

erklärt werden. Dann folgt aus den vorangehenden Betrachtungen

1.2 Satz *Zu jedem Punkt P_1 der Eilinie E gibt es genau ein einfach geschlossenes Tangenten- n -Seit $\Sigma_n(P_1)$, dessen erste Seite E in P_1 berührt und bei dem alle Seiten mit eventueller Ausnahme der letzten die Müllersche Mittelpunktsbedingung erfüllen.*

$\Sigma_n(P_1)$ ist genau dann ein Müllersches n-Seit, wenn $\delta_n(P_1) = 0$ gilt.

Die Funktion $\delta_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

Punkte P von E werden hiernach im allgemeinen keine Berührungspunkte Müllerscher n-Seite sein. Als Nullstellen von δ_n werden sie eher die Ausnahme bilden. Wenn aber P_1 Berührungspunkt eines Müllerschen n-Seits mit den weiteren Berührungspunkten P_2, \dots, P_n ist, dann besitzt dieses n-Seit die Form $\Sigma_n(P_1)$, und es gilt auch

$$\Sigma_n(P_1) = \Sigma_n(P_i) \quad , \quad \delta_n(P_1) = \delta_n(P_i) = 0 \quad \text{für } i=2, \dots, n.$$

Eine Tangenten-n-Seite der Form $\Sigma_n(P_1)$ mit den weiteren Berührungspunkten P_2, \dots, P_n zerlegt E in n Teilbogen $E_1(P_1)$ zwischen P_1 und $P_2, \dots, E_n(P_1)$ zwischen P_n und P_1 . Wenn $\Sigma_n(P_1)$ aber kein Müllersches n-Seit ist, dann sind die Tangenten-n-Seite $\Sigma_n(P_1), \Sigma_n(P_2), \dots, \Sigma_n(P_n)$ im allgemeinen verschieden, und auch die Funktionswerte $\delta_n(P_1), \dots, \delta_n(P_n)$ können unterschiedlich ausfallen. Einfache geometrische Überlegungen zeigen indes

1.3 Satz $\Sigma_n(P_1)$ besitze die Berührungspunkte P_1, \dots, P_n . Dann gilt

$$\operatorname{sgn}(\delta_n(P_1)) = \operatorname{sgn}(\delta_n(P_2)) = \dots = \operatorname{sgn}(\delta_n(P_n)).$$

P'_1, \dots, P'_n seien die Berührungspunkte von $\Sigma_n(P'_1)$, und P'_1 sei ein Punkt des durch P_1 bestimmten Teilbogens $E_k(P_1)$. Dann gilt $P'_2 \in E_{k+1}(P_1), \dots, P'_n \in E_{k-1}(P_1)$ entsprechend der durch die Orientierung festgelegten Reihenfolge, wobei die Sonderfälle $k=1$ und $k=n$ sinngemäß einzuordnen sind.

2. Angepaßte Eilini

Im Gegensatz zu der an 1.2 anschließenden Bemerkung sollen in diesem Abschnitt Eilini untersucht werden, die der Problemstellung dadurch besonders angepaßt sind, daß die Müllerschen n-Seite bei ihnen keine Ausnahmerolle spielen.

2.1 Definition E heißt n-angepaßt, wenn jeder Punkt von E Berührungspunkt eines Müllerschen n-Seits ist.

E heißt angepaßt, wenn E n-angepaßt für alle $n \geq 3$ ist.

Nach der Bemerkung in der Einleitung sind diese Begriffe bei Affinitäten invariant.

Offenbar ist die Kreislinie eine angepaßte Eilinie. Also gilt dies auch für alle Bilder der Kreislinie bei Affinitäten, nämlich für alle Ellipsen. Diese einfache Feststellung dürfte der ursprüngliche Anlaß für die Problemstellung gewesen sein. Hieran anschließend erhebt sich die Frage, welche angepaßten Eilini es sonst noch gibt. Sie wird durch den folgenden Satz in sehr einfacher Weise beantwortet.

2.2 Satz Folgende Aussagen sind paarweise gleichwertig:

- (a) E ist eine Ellipse.
- (b) E ist angepaßt.
- (c) E ist 3-angepaßt.

Nach der Vorbemerkung und wegen der Definition gilt jedenfalls $(a) \rightarrow (b) \rightarrow (c)$. Zu beweisen ist somit nur noch $(c) \rightarrow (a)$. Diesem Nachweis sollen zunächst noch ein Begriff und ein mit ihm verbundener Satz als Beweishilfsmittel vorausgeschickt werden.

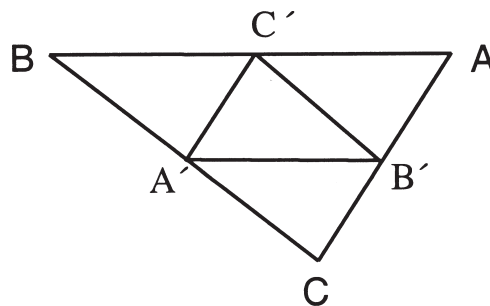
2.3 Definition Verbindet man in einem Tangenten- n -Seit von E die Berührungspunkte entsprechend ihrer Reihenfolge, so erhält man das zugehörige Sehnen- n -Eck von E .

Ein Sehnen- n -Eck von E heißt Müllersches n -Eck von E , wenn es das zu einem Müllerschen n -Seit von E gehörende Sehnen- n -Eck ist.

Bei gegebenem Sehnen- n -Eck von E kann man das zugehörige Tangenten- n -Seit einfach gewinnen: Man braucht nur durch die Ecken des Sehnen- n -Ecks die Tangenten von E zu konstruieren. An dem so gewonnenen Tangenten- n -Seit kann man dann feststellen, ob es ein Müllersches n -Seit und damit das Sehnen- n -Eck ein Müllersches n -Eck von E ist. Allerdings bedarf es dabei der Verfügbarkeit von E für die Tangentenkonstruktion.

2.4 Satz Ein Sehnen-Dreieck von E ist genau dann ein Müllersches Dreieck, wenn jede seiner Seiten zu der Tangente von E durch den gegenüberliegenden Eckpunkt parallel ist.

Beweis:



Figur 2

A, B, C sei ein Tangenten-Dreieck von E mit dem zugehörigen Sehnen-Dreieck A', B', C' . Ist A, B, C sogar ein Müllersches Dreieck, sind die Teildreiecke C', B, A' und A, C', B' kongruent, und es folgt die Parallelität der Seite $A'B'$ zu der Tangente $A \vee B$. Umgekehrt sei diese Parallelität vorausgesetzt. Dann sind die durch die Eckpunkte C', B, A', B' bzw. A, C', A', B' bestimmten Vierecke sogar Parallelogramme, und es folgt die Gleichheit der Strecken $\overline{BC'}$ und $\overline{AC'}$, so daß C' Seitenmittelpunkt ist. Entsprechendes gilt hinsichtlich der anderen beiden Seiten. •

Dieser Satz ist deswegen nützlich, weil er bereits aus der Kenntnis, daß es sich bei einem Sehnendreieck sogar um ein Müllersches Dreieck handelt, die Konstruktion der Tangenten von E durch die Eckpunkte gestattet, ohne die Eilinie E direkt verfügbar zu haben. In den Fällen $n > 3$ ist eine entsprechende Vorschrift teils komplizierter und teils sogar unmöglich. Hierauf wird in Abschnitt 5 eingegangen.

Beweis von Satz 2.2, (c) \rightarrow (a):

Wegen (c) wird E als 3-angepaßt vorausgesetzt, und diese Voraussetzung wird dazu benutzt, zunächst für E eine geeignete Parameterdarstellung anzugeben. Dabei sollen die Punkte von E durch ihre Ortsvektoren \mathbf{x} bezüglich eines fest gewählten Nullpunkts gekennzeichnet werden.

Zunächst sei \mathbf{x}_1^* auf E fest gewählt. Dann gibt es nach Voraussetzung genau ein Müllersches Dreieck mit den Ecken \mathbf{x}_1^* , \mathbf{x}_2^* , \mathbf{x}_3^* , durch die E in drei Teilbogen E_1 , E_2 , E_3 zerlegt wird. Für die Punkte \mathbf{x}_1 des Bogens E_1 zwischen \mathbf{x}_1^* und \mathbf{x}_2^* sei $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1(\tau)$ eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung mit $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_1^*$ und $\mathbf{x}_1(\frac{2\pi}{3}) = \mathbf{x}_2^*$. Diese Darstellung wird folgendermaßen auf die Bogen E_2 und E_3 fortgesetzt: Jeder Punkt $\mathbf{x}_1(\tau)$ mit $0 \leq \tau \leq \frac{2\pi}{3}$ bestimmt wieder eindeutig ein Müllersches Dreieck mit den Ecken $\mathbf{x}_1(\tau)$, $\mathbf{x}_2(\tau)$, $\mathbf{x}_3(\tau)$, wobei außerdem $\mathbf{x}_2(\tau) \in E_2$ und $\mathbf{x}_3(\tau) \in E_3$ gilt. Durch

$$\mathbf{x}_1(\tau + \frac{2\pi}{3}) = \mathbf{x}_2(\tau) \quad , \quad \mathbf{x}_1(\tau + \frac{4\pi}{3}) = \mathbf{x}_3(\tau)$$

wird die Parameterdarstellung auf ganz E fortgesetzt. Wegen Satz 2.4 gilt

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_1(\tau)}{d\tau} &= \lambda_1(\tau) (\mathbf{x}_2(\tau) - \mathbf{x}_3(\tau)), \\ \frac{d\mathbf{x}_2(\tau)}{d\tau} &= \lambda_2(\tau) (\mathbf{x}_3(\tau) - \mathbf{x}_1(\tau)), \\ \frac{d\mathbf{x}_3(\tau)}{d\tau} &= \lambda_3(\tau) (\mathbf{x}_1(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau)) \end{aligned}$$

mit positiven stetigen Funktionen λ_1 , λ_2 , λ_3 , für die außerdem

$$\lambda_2(\tau) = \lambda_1(\tau + \frac{2\pi}{3}) \quad \text{und} \quad \lambda_3(\tau) = \lambda_1(\tau + \frac{4\pi}{3})$$

erfüllt ist.

Abschließend wird jetzt ein neuer Parameter t durch

$$t = f(\tau) = \sqrt{3} \int_0^\tau \lambda(\sigma) d\sigma$$

eingeführt, wobei f wegen $\lambda_1 > 0$ streng isoton und somit umkehrbar ist. Es folgt

$$\frac{d\mathbf{x}_1(f^{-1}(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{x}_1}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\mathbf{x}_1(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{dt/d\tau} = \frac{\lambda_1(\tau)}{\sqrt{3} \lambda_1(\tau)} (\mathbf{x}_2(f^{-1}(t)) - \mathbf{x}_3(f^{-1}(t)))$$

und daher $\lambda_1(t) = \lambda_1(f(\tau)) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, also auch $\lambda_2(t) = \lambda_3(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Mit der üblichen Bezeichnungsweise $\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{d\mathbf{x}_i}{dt}$ für $i = 1, 2, 3$ erhält man jetzt

$$(1) \quad \dot{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3), \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1), \quad \dot{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2).$$

Addition dieser Gleichungen ergibt $\dot{\mathbf{x}}_1 + \dot{\mathbf{x}}_2 + \dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{0}$, also die Konstanz des somit allen Müllerschen Dreiecken von E gemeinsamen Schwerpunktes.

Da in (1) die rechten Seiten stetig differenzierbar sind, gilt dies auch für die linken Seiten, woraus die endlich häufige Differenzierbarkeit folgt. Man erhält

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{1}{3} (\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 - 2\mathbf{x}_1), \quad \ddot{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2) \quad \text{sowie}$$

$$\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 = \sqrt{3} \dot{\mathbf{x}}_1, \quad \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = 3\ddot{\mathbf{x}}_1 + 2\mathbf{x}_1.$$

Einsetzen und Elimination von $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ ergibt die homogene lineare Differentialgleichung

$$\ddot{\mathbf{x}}_1 + \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{0}.$$

Ihre allgemeine Lösung ist

$$\mathbf{x}_1 = \cos t \cdot \mathbf{a} + \sin t \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

mit konstanten Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, wobei \mathbf{c} lediglich ein Translationsglied ist. Als Parameterdarstellungen der gesuchten Eilinen kommen jedoch nur diejenigen Lösungen in Betracht, die auch tatsächlich Eilinen ergeben. Und dies sind genau die Lösungen, bei denen \mathbf{a} und \mathbf{b} linear unabhängige Vektoren sind, also gerade genau alle Ellipsen. •

Der damit bewiesene Satz 2.2 gibt eine befriedigende Antwort auf die Frage nach den angepaßten Eilinen. Daß er aber in anderer Hinsicht eine Reihe von Fragen offen läßt, wird Gegenstand der letzten Abschnitte 5 bis 7 sein.

3. Existenz Müllerscher n-Seite

Die angepaßten Eilinen, nämlich die Ellipsen, werfen die gegenteilige Frage auf, ob es auch besonders unangepaßte Eilinen gibt, die überhaupt keine Müllerschen n-Seite besitzen. In Satz 3.2 soll hier gezeigt werden, daß dies nicht der Fall ist. Dazu jedoch zunächst ein vorbereitender Satz.

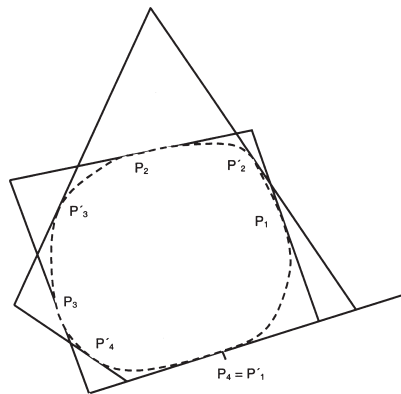
3.1 Satz *Es sei P_1 ein Punkt von E mit $\delta_n(P_1) > 0$, und $\sum_n(P_1)$ besitze die Berührungspunkte P_1, \dots, P_n , die ihrerseits E in die Teilbogen $E_i = E_i(P_1)$ ($i = 1, \dots, n$) zerlegen. Weiter sei $P'_1 = P_n$, und $\sum_n(P'_1)$ besitze die Berührungspunkte P'_1, \dots, P'_n . Dann gilt:*

$$(1) P'_2 \in E_1, \dots, P'_n \in E_{n-1}.$$

$$(2) \text{ Für } i=2, \dots, n \text{ ist } P'_i \text{ gegenüber } P_{i-1} \text{ auf } E \text{ im Sinn der Orientierung in positiver Richtung verschoben.}$$

Bemerkung: Im Fall $\delta_n(P_1) < 0$ gilt Entsprechendes, wobei in (2) aber die Verschiebung in negativer Richtung erfolgt.

Beweis:



Figur 3

Aus der Skizze für $n = 4$ entnimmt man: Bei der Konstruktion von $\Sigma_n(P'_1)$ muß im Fall $\delta_n(P_1) > 0$ die tangentielle Seite in $P'_1 = P_n$ wegen der Mittelpunktsbedingung in positiver Richtung verlängert und entsprechend in negativer Richtung verkürzt werden. Hieraus ergibt sich unmittelbar die zweite Behauptung. Die erste Behauptung folgt aus Satz 1.3. •

3.2 Satz Eine beliebige Eilinie E besitzt für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ mindestens zwei Müllersche n -Seite.

Beweis: Es sei n gegeben. Man kann dann voraussetzen, daß E nicht n -angepaßt ist, weil es sonst sogar unendlich viele Müllersche n -Seite gibt. Dann existieren also Punkte $P \in E$ mit $\delta_n(P) \neq 0$. Es sei P_1 ein solcher Punkt, und es sei $\delta_n(P_1) > 0$ vorausgesetzt. (Der Fall $\delta_n(P_1) < 0$ kann analog behandelt werden.)

Das durch P_1 bestimmte Tangenten- n -Seit $\Sigma_n(P_1)$ besitze wie oben die Berührungspunkte P_1, \dots, P_n , die E in die Teilbogen E_1, \dots, E_n zerlegen. Wegen Satz 1.3 gilt auch $\delta_n(P_2) > 0, \dots, \delta_n(P_n) > 0$.

Es werden zwei komplementäre Fälle unterschieden.

Fall 1: Es gibt einen Punkt P' von E mit $\delta_n(P') < 0$.

Dieser Punkt P' ist innerer Punkt eines Teilbogens E_k , in dessen Endpunkten δ_n ja positive Werte besitzt. Wegen der Stetigkeit von δ_n gibt es daher Punkte $P'_1, P'_2 \in E_k$ mit $\delta_n(P'_1) = \delta_n(P'_2) = 0$, wobei im Sinn der Orientierung P'_1 vor P' und P'_2 nach P' positioniert ist. Wegen Satz 1.2 sind $\Sigma_n(P'_1)$ und $\Sigma_n(P'_2)$ Müllersche n -Seite von E , und diese sind auch wegen Satz 1.3 verschieden, weil bei Gleichheit die verschiedenen Berührungspunkte P'_1, P'_2 auf demselben Teilbogen liegen würden.

Fall 2: $\delta_n(P') \geq 0$ für alle $P' \in E$.

Konstruiert wird eine Folge $(T_i)_{i \geq 0}$ aus Tangenten-n-Seiten von E :

$$T_0 = \sum_n (P_1).$$

Gilt $T_i = \sum_n (P_1^{(i)})$ mit den Berührungspunkten $P_1^{(i)}, \dots, P_n^{(i)}$,
so sei

$$T_{i+1} = \sum_n (P_n^{(i)}).$$

Bei den damit definierten Tangenten-n-Seiten T_i sollen nachträglich ihre Berührungspunkte zyklisch umnummeriert werden, so daß immer $P_k^{(i)} \in E_k$ erfüllt ist. Dann ist für $k=1, \dots, n$ jeweils $(P_k^{(i)})_{i \geq 0}$ eine Punktfolge im dem Teilbogen E_k . Jede dieser Punktfolgen ist daher beschränkt und wegen Satz 3.1 im Sinn der Orientierung isoton, also konvergent. Damit erhält man auch bei der Folge $(T_i)_{i \geq 0}$ ein Tangenten-n-Seit T^* als Grenzwert mit Berührungspunkten $P_1^* \in E_1, \dots, P_n^* \in E_n$. Aus der Konstruktion der T_i folgt jetzt $T^* = \sum_n (P_k^*)$ für $k=1, \dots, n$. Würde man z.B. $\delta_n(P_n^*) > 0$ voraussetzen, so wäre dies wegen Satz 3.1 (2) ein Widerspruch zu $T^* = \sum_n (P_n^*)$. Also gilt bei Berücksichtigung von Satz 1.3 jetzt $\delta_n(P_1^*) = \dots = \delta_n(P_n^*) = 0$, und T^* ist wegen Satz 1.1 ein Müllersches n-Seit.

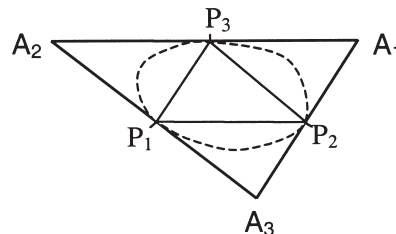
Wegen $\delta_n(P_1^*) = 0$ kann P_1^* nicht der Endpunkt P_2 des Bogens E_1 sein, weil ja $\delta_n(P_2) > 0$ gilt. Wegen der Stetigkeit von δ_n gibt es daher zwischen P_1^* und P_2 einen Punkt P_1' mit $\delta_n(P_1') > 0$. Mit ihm beginnend, kann man wie oben wieder eine konvergente Folge $(T_i')_{i \geq 0}$ konstruieren, die als Grenzwert ein zweites Müllersches n-Seit liefert, womit dann der Satz bewiesen ist. •

Im Fall 2 dieses Beweises kann der Prozeß übrigens fortgesetzt werden und führt zu einer Häufung Müllerscher n-Seite.

Ergänzend zu Satz 3.2 ist zu bemerken, daß man Beispiele von Eilinen angeben kann, die auch tatsächlich nur zwei Müllersche n-Seite besitzen.

4. Eilinen zu gegebenen Müllerschen n-Seiten

Eine gewisse Umkehr der bisherigen Fragestellungen ergibt sich, wenn man geeignete n-Seite vorgibt und dann eine Eilinie zu konstruieren versucht, bei der diese gegebenen n-Seite sogar Müllersche n-Seite sind. Diese Situation soll an zwei einfachen Beispielen erläutert werden, die der Übersichtlichkeit halber auf den Fall $n=3$ beschränkt bleiben sollen. Eine Übertragung der Gesichtspunkte auf größere n ist unmittelbar möglich.



Figur 4

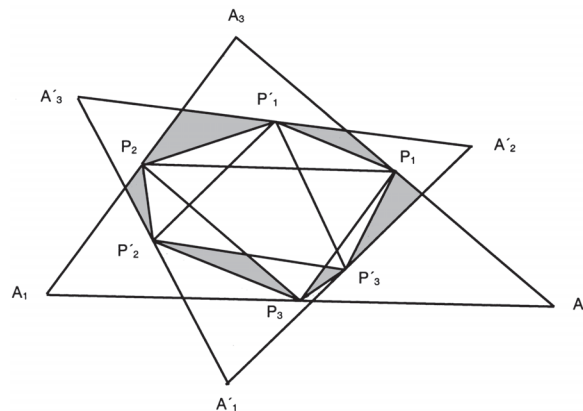
Bei Vorgabe nur eines beliebigen Dreiecks mit den Ecken A_1, A_2, A_3 und den Seitenmittelpunkten P_1, P_2, P_3 sowie mit dem zugehörigen Sehnendreieck ist die Aufgabe einfach und auf viele Weisen lösbar: Eine mögliche Eilinie muß im Innern der Dreiecke P_1, A_3, P_2 , P_2, A_1, P_3 und P_3, A_2, P_1 verlaufen. In jedem dieser Dreiecke kann man irgendeinen konvexen Bogen benutzen, der z.B. im ersten Dreieck von P_1 nach P_2 verläuft und in P_1, P_2 die dort vorgeschriebenen Tangenten besitzt. Die drei Bogen zusammen ergeben dann eine Eilinie mit dem gegebenen Dreieck als Müllerschem Dreieck.

An dieses einfache Beispiel kann man sogleich eine Bemerkung anschließen, die auch für alle anderen Fälle ($n > 3$, mehr Vorgaben) wichtig ist: Wenn man zu gegebenen n -Seiten eine Eilinie bestimmt hat, für die diese n -Seite sogar Müllersche n -Seite sind, dann besagt dies nicht, daß die gegebenen n -Seite auch die einzigen Müllerschen n -Seite der konstruierten Eilinie sind. Im Fall nur eines gegebenen n -Seits ist dies offensichtlich, weil ja nach Satz 3.2 jede Eilinie mindestens zwei Müllersche n -Seite besitzt. Unabhängig von der vorliegenden Situation besteht die

Offene Frage: Gibt es bei gegebenen $n \geq 3$ und $k \geq 3$ immer eine Eilinie, die genau k Müllersche n -Seite besitzt?

Wie am Ende des letzten Abschnitts erwähnt wurde, kann diese Frage im Fall $k=2$ positiv beantwortet werden.

An dem nächst komplizierten Fall zweier gegebener Dreiseite kann man bereits die typischen Schwierigkeiten erkennen, die sich mit zunehmender Zahl der gegebenen Dreiseite rasch steigern.



Figur 5

Die Seitenmittelpunkte P'_1, P'_2, P'_3 des zweiten gegebenen Dreiseits, also seine Berührungspunkte mit der zu bestimmenden Eilinie, müssen innerhalb der Dreiecke P_1, A_3, P_2 , P_2, A_1, P_3 , P_3, A_2, P_1 liegen. Außerdem darf aber z.B. die durch P'_1 gehende Seite, also

die Tangente, nicht die Sehne von P_1 nach P_2 schneiden (entsprechend P'_2, P'_3). Die Figur läßt erkennen, daß bereits jetzt die Wahlfreiheit erheblich eingeschränkt ist. Die gesuchte Eilinie muß innerhalb der unterlegten sechs kleinen Dreiecke verlaufen, muß also auch aus sechs konvexen Bogen entsprechend zusammengesetzt werden. Bei Vorgabe eines weiteren Dreiseits beziehen sich die vorher gemachten Bemerkungen jetzt auf jedes zweite der sechs unterlegten Dreiecke.

Wegen Satz 2.2 dürfte bei vielen, möglichst gleichverteilten Dreiseiten eine solche Vorgabe überhaupt nur möglich sein, wenn die damit zu konstruierende Eilinie nicht zu stark von einer Ellipse abweicht. Im Fall $n > 3$ ergeben sich teilweise etwas andere Gesichtspunkte, wie sich in den jetzt folgenden Abschnitten zeigen wird.

5. n-angepaßte Eilinen: Vorbereitung

Durch Satz 2.2 wurden die angepaßten Eilinen als Ellipsen gekennzeichnet, wobei der wesentliche Beweisteil darin bestand, bereits die 3-angepaßten Eilinen als Ellipsen nachzuweisen. Dies legt die Frage nahe, ob auch für $n > 3$ die n-angepaßten Eilinen schon Ellipsen sind und ob man dies ähnlich wie bei Satz 2.2 beweisen kann. In den folgenden Abschnitten soll gezeigt werden, daß dies in den meisten Fällen nicht zutrifft.

Es seien A_1, \dots, A_n die Ecken eines konvexen einfach geschlossenen n-Seits, und P_1, \dots, P_n seien die Seitenmittelpunkte. Diese Punkte sollen durch Ortsvektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ bzw. $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ gekennzeichnet werden. Setzt man noch $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_n$, so gilt bei entsprechender Numerierung $\mathbf{p}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{i-1} + \mathbf{a}_i)$ für $i = 1, \dots, n$. Außerdem soll noch $n = 2m$ bzw. $n = 2m+1$ mit einer natürlichen Zahl m gelten.

5.1 Satz

$$\sum_{i=1}^{2m} (-1)^{i-1} \mathbf{p}_i = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{2m}) \quad .$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2m} (-1)^{i-1} \mathbf{p}_i &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2m} (-1)^{i-1} (\mathbf{a}_{i-1} + \mathbf{a}_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2m-1} (-1)^j \mathbf{a}_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2m} (-1)^i \mathbf{a}_i \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_{2m}) = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{2m}). \quad \bullet \end{aligned}$$

Dieser einfache Satz hat zwei wichtige Konsequenzen: Es seien A_1, \dots, A_n die Ecken eines Müllerschen n-Seits einer Eilinie. Die Punkte P_1, \dots, P_n sind dann die Berührungspunkte mit der Eilinie und somit die Ecken des zugehörigen Müllerschen Sehnen-n-Ecks.

Erstens sei nun n ungerade, also $n=2m+1$. Satz 5.1 besagt dann: Die Wechselsumme der Ortsvektoren der Ecken des Müllerschen n-Ecks ist bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ gerade der Vektor

$\overrightarrow{A_{2m}A_n}$, also ein Tangentenvektor in P_n . Dies ist eine Verallgemeinerung von Satz 2.4: Wenn man weiß, daß man es mit einem Müllerschen n-Eck der Eilinie zu tun hat, dann kann man die Tangenten in den Eckpunkten konstruieren, ohne dabei die Eilinie mit heranzuziehen. In diesem Fall wird sich daher die Beweismethode von Satz 2.2 übertragen lassen.

Zweitens sei n gerade, also $n = 2m$. Dann ergibt jetzt die Wechselsumme aus Satz 5.1 den Nullvektor. Eine entsprechende Konstruktion von Tangenten wie vorher ist also nicht möglich. Sie ist aber auch prinzipiell nicht möglich: Ausgehend von einem beliebigen Punkt A'_0 mit dem Ortsvektor \mathbf{a}'_0 definiert man in Anlehnung an die Konstruktion der n-Seite $\Sigma_n(P)$ weitere Vektoren $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n$ rekursiv durch

$$\mathbf{a}'_i = 2\mathbf{p}_i - \mathbf{a}'_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n=2m),$$

so daß \mathbf{p}_i gerade die Mittelpunkte der Strecken von A'_{i-1} bis A'_i sind. Das n-Seit mit diesen Ecken A'_i wird im allgemeinen weder konvex noch einfach geschlossen sein. Jedenfalls ist es aber geschlossen wegen der aus der Rekursionsvorschrift und aus Satz 5.1 folgenden Gleichung

$$\mathbf{a}'_{2m} = 2\mathbf{p}_{2m} - 2\mathbf{p}_{2m-1} + \dots - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{a}'_0 = \mathbf{a}'_0.$$

Eine eingehende Diskussion zeigt: Diejenigen Startpunkte A'_0 , die konvexe, als Müllersche n-Seite verwendbare n-Seite ergeben, bilden eine nicht leere offene Menge, so daß eine eindeutige Tangentenkonstruktion ohne Heranziehung der Eilinie nicht möglich ist.

6. n-angepaßte Eilinen: $n=2m+1$

Wie vorher bemerkt, kann man zur Bestimmung n-angepaßter Eilinen im Fall ungerader n analog vorgehen wie im Beweis von Satz 2.2 für $n = 3$. Dies führt dann auf eine homogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

In einem ersten Schritt verschafft man sich wie im Fall $n = 3$ mit Hilfe der Müllerschen Sehnen-n-Ecke für die Eckvektoren \mathbf{x}_i eine geeignete Parameterdarstellung $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\tau)$ für $i = 1, \dots, n$. Deren Ableitungen kann man dann mit Hilfe von Satz 5.1 und der anschließenden Bemerkung bestimmen. Da sich allerdings Satz 5.1 speziell auf die n -te Ecke bezieht, muß man die Summation jeweils verlagern. Man erhält

$$\frac{d\mathbf{x}_i(\tau)}{d\tau} = \lambda_i(\tau) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (-1)^{j-i-1} \mathbf{x}_j(\tau) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Die stetigen und positiven Funktionen λ_i können nun in einem zweiten Schritt wie im Fall $n = 3$ durch eine Parametertransformation $t = f(\tau)$ in konstante Funktionen mit gemeinsamem Wert überführt werden. Auf eine vorherige Normierung dieser Konstante λ soll hier zunächst verzichtet und einfach $\lambda = 1$ gesetzt werden.

Dann gilt also

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (-1)^{j-i-1} \mathbf{x}_j(t) \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

oder gleichwertig

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix} = \mathcal{A}_n \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$$

mit der zyklischen Matrix

$$\mathcal{A}_n = \text{Zykl}(0, 1, -1, \dots, 1, -1).$$

\mathcal{A}_n ist außerdem eine schiefsymmetrische Matrix, die daher außer Null nur noch rein imaginäre Eigenwerte besitzt.

Ebenso wie im Fall $n = 3$ folgt auch hier die endliche Differenzierbarkeit der \mathbf{x}_i , so daß dann

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{(k)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{(k)} \end{bmatrix} = \mathcal{A}_n \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{(k-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{(k-1)} \end{bmatrix} = \mathcal{A}_n^k \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$$

gilt. Die gesuchte lineare Differentialgleichung für jeden der Vektoren \mathbf{x}_i (es soll daher einfacher nur \mathbf{x} geschrieben werden) besitzt die Form

$$\mathbf{x}^{(n)} + a_{n-2} \mathbf{x}^{(n-2)} + \dots + a_1 \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

mit nur ungeraden Ableitungen, wobei $P(s) = s^n + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s$ gerade das charakteristische Polynom von \mathcal{A}_n ist. Seine Eigenwerte seien

$$0, \pm \omega_1 i, \dots, \pm \omega_m i \quad (n=2m+1),$$

wobei noch $\omega_1 > \omega_2 > \dots > \omega_m$ vorausgesetzt werden kann, da diese Eigenwerte außerdem alle verschieden sind. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist nun

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m (\cos(\omega_i t) \mathbf{a}_i + \sin(\omega_i t) \mathbf{b}_i) + \mathbf{c}.$$

Lösungen, die n -angepaßte Eilinen ergeben, sind allerdings nur diejenigen Lösungskurven, die einfach geschlossen und konvex sind.

Der Fall $n = 3$, also $m = 1$, wurde bereits beim Beweis von Satz 2.2 erfaßt und lieferte genau alle Ellipsen.

Im nächsten Fall $n = 5$, also $m = 2$, hat man es mit der Differentialgleichung

$$\mathbf{x}^{(5)} + 10 \ddot{\mathbf{x}} + 5 \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

und der allgemeinen Lösung

$$\mathbf{x} = (\cos(\omega_1 t) \mathbf{a}_1 + \sin(\omega_1 t) \mathbf{b}_1) + (\cos(\omega_2 t) \mathbf{a}_2 + \sin(\omega_2 t) \mathbf{b}_2) + \mathbf{c}$$

zu tun. Dabei ist ω_2/ω_1 wegen des Auftretens von $\sqrt{5}$ irrational. Startet man mit $t = 0$, so schließt sich bei Voraussetzung von $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$ die Kurve $\varphi_1(t) = \cos(\omega_1 t) \mathbf{a}_1 + \sin(\omega_1 t) \mathbf{b}_1$ erstmalig für $t = 2\pi/\omega_1$. Damit sich die gesamte Lösungskurve für diesen Wert schließt, muß $\varphi_2(t) = \cos(\omega_2 t) \mathbf{a}_2 + \sin(\omega_2 t) \mathbf{b}_2$ die Bedingungen $\varphi_2(\omega_2/\omega_1 \cdot 2\pi) = \varphi_2(0)$ und $\dot{\varphi}_2(\omega_2/\omega_1 \cdot 2\pi) = \dot{\varphi}_2(0)$ erfüllen. Eine einfache Rechnung zeigt aber, daß die erste Bedingung die lineare Abhängigkeit von \mathbf{a}_2 und \mathbf{b}_2 nach sich zieht und daß dann die zweite Bedingung nicht erfüllbar ist. Es muß also $\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$ gelten, und bei der notwendigen linearen Unabhängigkeit von \mathbf{a}_1 und \mathbf{b}_1 handelt es sich wieder um eine Ellipse. Im Fall $\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$ liefert φ_2 bei linearer Unabhängigkeit von $\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2$ ebenfalls eine Ellipse, und lineare Abhängigkeiten führen auf keine Eilinen. Damit gilt wie im Fall $n=3$

6.1 Satz *Die 5-angepaßten Eilinen sind genau die Ellipsen.*

Schließlich hat man im Fall $n \geq 7$, also $m \geq 3$, die allgemeine Lösung

$$\mathbf{x} = \cos(\omega_1 t) \mathbf{a}_1 + \sin(\omega_1 t) \mathbf{b}_1 + \sum_{i=2}^m (\cos(\omega_i t) \mathbf{a}_i + \sin(\omega_i t) \mathbf{b}_i) + \mathbf{c}.$$

Stellt man hier wie im Fall $n = 5$ entsprechend die Schließungsbedingungen auf, so hat man es mit einem homogenen linearen Gleichungssystem für die Vektoren $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ und $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$ zu tun, das jetzt aber mindestens zwei Vektoren mehr betrifft und nicht trivial lösbar ist. Mit einer derartigen Lösung hat man dann eine einfach geschlossene Lösungskurve, die aber im allgemeinen nicht konvex ist. Bei festen linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$ kann man aber die Lösungsvektoren des homogenen Gleichungssystems noch mit einem gemeinsamen Faktor $q > 0$ multiplizieren, ohne die Schließungsbedingungen zu verletzen. Bei hinreichend kleinem q kann man dann auch die Konvexität erreichen.

Abweichend gilt jetzt daher

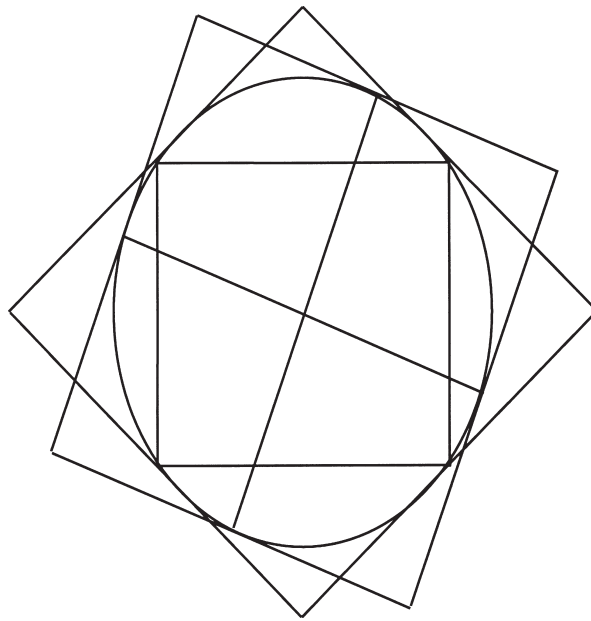
6.2 Satz *Für ungerade n mit $n \geq 7$ gibt es n -angepaßte Eilinen, die keine Ellipsen sind.*

Allerdings werden sie unter Umständen nicht so sehr von der durch $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$ bestimmten Ellipse abweichen.

7. n-angepaßte Eilinen: $n=2m$

Die Bemerkungen im Abschnitt 5 zum Fall gerader m lassen die Konstruierbarkeit n -angepaßter Eilinen erwarten, die keine Ellipsen sind. Man hat dabei darauf zu achten, daß alle Müllerschen Sehnen- n -Ecke die Bedingungen aus Satz 5.1 erfüllen. Eine solche Konstruktion soll jetzt exemplarisch im Fall $n = 4$, also $m = 2$ durchgeführt werden.

In diesem Fall müssen alle Müllerschen Sehnen-Vierecke wegen Satz 5.1 Parallelogramme sein. Als Anfang der Konstruktion wird man von einem festen Parallelogramm ausgehen, das man wegen der affinen Invarianz sogleich als Quadrat mit den Ecken $(\pm 1, \pm 1)$ wählen kann.



Figur 6

An die obere und untere Seite des Quadrats füge man die kongruenten Parabelbogen

$$\begin{bmatrix} -t \\ (3-t^2)/2 \end{bmatrix} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} t \\ (-3+t^2)/2 \end{bmatrix} \text{ mit den Ableitungen } \begin{bmatrix} -1 \\ -t \end{bmatrix} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$$

an. Sie garantieren, daß die gesamte Eilinie keine Ellipse ist. Die jetzt noch an den vertikalen Seiten des Quadrats anzubringenden kongruenten konvexen Bogen müssen so bestimmt werden, daß das jeweilige Sehnen-Viereck ein Parallelogramm ist. Setzt man etwa den linken Bogen in der Form

$$\begin{bmatrix} f(t) \\ -t \end{bmatrix} \text{ mit der Ableitung } \begin{bmatrix} \dot{f}(t) \\ -1 \end{bmatrix} \text{ und den Randbedingungen}$$

$$f(-1) = -1, \dot{f}(-1) = -1, f(1) = -1, \dot{f}(1) = 1$$

an, so erhält man nach einer Zwischenrechnung die Differentialgleichung

$$\dot{f}(t) = - \frac{2t \cdot f(t)}{3(f(t))^2 - t^2}.$$

Sie besitzt mit

$$f(t) = -\frac{2}{3} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{3}{4}t^2}\right)$$

eine konvexe Lösung, die auch die Randbedingungen erfüllt. Die beiden so bestimmten fehlenden Bogen verlaufen etwas flacher als die Parabelbogen. Zusammen erhält man damit eine 4-angepaßte Eilinie, die keine Ellipse ist.

Selbstverständlich handelt es sich hierbei um eine sehr spezielle und bequeme Konstruktion, die in mannigfacher Weise modifiziert werden kann. Insbesondere kann man statt der Parabelbogen auch andere konvexe Bogen benutzen, nur eben keine Ellipsenbogen.

Unter Wahrung der Symmetrien läßt sich diese Konstruktion auch auf die Fälle $n = 2m$ mit $m \geq 3$ sinngemäß übertragen: Man gehe von einem regulären n -Eck als Müllerschem Sehnenn-Eck aus und füge an jede zweite Seite z.B. wieder einen entsprechenden Parabelbogen. Dazwischen muß man dann zur Erfüllung von Satz 5.1 einen geeigneten konvexen Bogen einfügen, den man analog als Lösungskurve einer Differentialgleichung gewinnen kann. Zusammenfassend hat man dann insgesamt das Ergebnis

7.1 Satz Für $n = 3$ und $n = 5$ sind die n -angepaßten Eilinie genau die Ellipsen.

Für $n = 4$ und für $n \geq 6$ gibt es außer den Ellipsen noch weitere n -angepaßte Eilini

Offen bleibt die Frage, ob es zwischen n -angepaßten Eilini